Varianta 19

Subiectul I.

a) Distanța căutată este $\frac{1}{5}$.

b) Mijlocul segmentului AB este punctul $P(3,3,3)$

c) $a=3$.

d) Punctele căutate sunt $A\left(\frac{20}{3},\frac{20}{3}\right)$ și $B\left(-\frac{20}{3},-\frac{20}{3}\right)$.

e) $tg\frac{\pi}{4}=1$.

f) $1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}=0$.

Subiectul II.

1.

a) $\log_2 4=2$.

b) În mulțimea $\mathbf{Z}_8$, $\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\hat{3}\cdot\hat{4}\cdot\hat{5}\cdot\hat{6}\cdot\hat{7}=\hat{0}$.

c) $\frac{23}{24}$.

d) Probabilitatea căutată este $p=0$.

e) $x\in\{-2,2\}$.

2.

a) $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

b) $f'(x)<0$, $\forall x\in(e,\infty)$, deci funcția f este descrescătoare pe intervalul $[e,\infty)$.

c) $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1$.

d) Dreapta Ox : $y=0$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0$.

Subiectul III.

a) $f(0)=-1$ și $z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n=(-1)^{n+1}$.

b) Din **a)** obținem: $|z_1|\cdot|z_2|\cdot\ldots\cdot|z_n|==1$.

c) Evident, deoarece $f(0)=-1<0$ și $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$.

d) Din **b)** avem: $|z_1|\cdot|z_2|\cdot\ldots\cdot|z_n|=1$.

Folosind ipoteza, deducem că $|z_1|\cdot|z_2|\cdot\ldots\cdot|z_n|\geq 1$ şi că egalitatea are loc dacă şi numai dacă avem $|z_1|=|z_2|=\ldots=|z_n|=1$.

e) Se folosesc **c)** şi **d)**.

f) Pentru n număr par, polinomul f are şi rădăcina -1, aşadar polinomul X^2-1 îl divide pe f.

g) Eventual renumerotând rădăcinile polinomului f, putem alege $z_1=1$.

Aplicând prima relație a lui Viète, obținem:

$$n=|z_1+z_2+\ldots+z_n|\leq|z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n|\overset{\text{d)}}{=}n$$

În inegalitatea precedentă avem egalitate, dacă şi numai dacă $\forall\, k\in\{2,\ldots,n\}$, există $a_k\in(0,\infty)$ astfel încât $z_k=a_k\cdot z_1=a_k$.

Obținem $z_1=z_2=\ldots=z_n=1$, iar $f=(X-1)^n$.

Deoarece termenul liber al lui f este -1, rezultă că numărul n este impar.

Subiectul IV.

a) $[y]=\begin{cases}-1, & y\in[-1,0)\\ 0, & y\in[0,1)\\ 1, & y\in[1,2)\end{cases}\quad\Rightarrow\quad f(x)=\begin{cases}0, & x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\\ 1, & x=\frac{1}{2}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad g(x)=|x|,\ \forall\, x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right].$

b) Se arată uşor că $g(x+1)=g(x)$, $\forall\, x\in\mathbf{R}$.

Funcția g este continuă pe $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ şi deoarece este periodică, de perioadă $T=1$ pe $\mathbf{R}$, rezultă că g este continuă pe $\mathbf{R}$.

c) $\int_0^1 g(x)\,dx=\frac{1}{4}$.

d) Făcând schimbarea de variabilă $x-(k-1)=t$ obținem

$$\int_{k-1}^{k} g(x)\,dx=\int_0^1 g(t+(k-1))\,dt\overset{g\ \text{periodică}}{=}\int_0^1 g(t)\,dt.$$

e) Evident, folosind aditivitatea integralei obținem, pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$,

$$\int_0^1 g(x)\cdot g(nx)\,dx=\int_0^{\frac{1}{n}} g(x)\cdot g(nx)\,dx+\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} g(x)\cdot g(nx)\,dx+\cdots+\int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n}} g(x)\cdot g(nx)\,dx\,\cdot$$

f) Pentru $k\in\mathbf{N}^*$, funcția g este continuă pe $\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$, deci există $x_k', x_k''\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$, astfel încât $g(x_k')=\min\limits_{x\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]} g(x)$ şi $g(x_k'')=\max\limits_{x\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]} g(x)$, adică $\quad g(x_k') \le g(x) \le g(x_k''),\ \ \forall\ x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right].$

Înmulțind relația precedentă cu $g(nx) \ge 0$, obținem:

$$g(x_k') \cdot g(nx) \le g(x) \cdot g(nx) \le g(x_k'') \cdot g(nx),\ \ \forall\ x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$$

şi integrând ultima inegalitate pe intervalul $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, deducem concluzia.

g) Însumăm relațiile de la punctul **f)** și obținem:

$$\sum_{k=1}^{n} g(x_k') \cdot \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} g(nx)\,dx \le \int_0^1 g(x) \cdot g(nx)\,dx \le \sum_{k=1}^{n} g(x_k'') \cdot \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} g(nx)\,dx \qquad (1)$$

Făcând schimbarea de variabilă $nx = t$ și folosind punctul **d)** rezultă ușor că

$$\sum_{k=1}^{n} g(x_k') \cdot \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} g(nx)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} \left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)^2 \quad \text{şi} \quad \sum_{k=1}^{n} g(x_k'') \cdot \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} g(nx)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} \left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)^2.$$

Folosind criteriul cleştelui în (1), obținem concluzia.